بنام خدا

فصل ۴ : حرکت در صفحه

در فصل قبل ، معادلات حرکت روی خط راست بررسی شد . حال می‌خواهیم نمونه هائی از حرکت دوبعدی را بررسی کنیم .

حرکت پرتابی :

مثال : از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین ، گلوله‌ای با سرعت $50 \frac{m}{s}$ و با زاویه 37° نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می‌شود . مطلوبست :

الف) مؤلفه های افقی و قائم سرعت اولیه .

ب) حداکثر ارتفاعی که گلوله به آن می رسد (ارتفاع اوج) .

ج) زمان رسیدن به اوج .

د) کل زمان حرکت گلوله (از پرتاب تا برخورد به زمین) .

ه) فاصله افقی بین نقطه پرتاب تا برخورد به زمین (برد) .

و) سرعت گلوله در لحظه برخورد به زمین .

ز) زاویه برخورد گلوله به زمین .

حل : با توجه به اینکه کمیتهای جابجایی ـ سرعت ـ شتاب و ... بردارند ، می‌توان حرکت دوبعدی را روی محورهای مختصات مناسب به دو حرکت یک بعدی (روی خط راست) تجزیه کرد و از معادلات حرکت روی خط راست ، استفاده کرد . حرکت پرتابی را به دو حرکت قائم (محور y) و افقی (محور x) تجزیه می‌کنیم .

(الف)
$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\theta \\ V_{0y} = V_0 \sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} V_{0x} = 50 \cos(37) = 50 (\frac{4}{5}) = 40 \ m/s \\ V_{0y} = 50 \sin(37) = 50 (\frac{3}{5}) = 30 \ m/s \end{cases}$$

حرکت روی محور افقی (x) ، حرکتی با سرعت ثابت است ، زیرا عاملی برای تغییر سرعت وجود ندارد (شرایط خلاء)

بنابراین معادله حرکت روی محور x ها، همان معادله مکان-زمان برای سرعت ثابت است:

$$x - x_0 = vt \xrightarrow[v = v_x = v_{0x}]{x_0 = 0} x = v_{0x} t$$

حرکت روی محور قائم (y ها)، تحت تاثیر گرانش، یک حرکت سقوطی است و از معادلات سقوط پیروی می‌کند.

$$y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0 = v_{0y}} y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$$

$$v - v_0 = -gt \xrightarrow[v = v_y]{v_0 = v_{0y}} v_y - v_{0y} = -gt$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \longrightarrow v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0)$$

با استفاده از معادلات بالا، می‌توان مجهولهای مسئله را محاسبه نمود. همیشه دقت کنید که سرعتها، روی محورها تجزیه و با مولفه‌های سرعت کار می‌کنیم (اندیس‌های x و y برای سرعتهای محور x و محور y الزامی است).

ب) نقطه اوج، حداکثر ارتفاعی است که گلوله به آن می‌رسد (مربوط به محور y ها). در این نقطه $v_y = 0$.

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \xrightarrow[\text{در اوج}]{v_y = 0} 0 - (30)^2 = -2(10)(y_{max} - 20) \longrightarrow y_{max} = 65\ m$$

ج) برای زمان اوج از معادله سرعت-زمان استفاده می‌کنیم.

$$v_y - v_{0y} = -gt_1 \xrightarrow[v_y = 0]{\text{در اوج}} 0 - 30 = -10\, t_1 \longrightarrow t_1 = 3\ s$$

د) برای برخورد گلوله به زمین، شرط برخورد به زمین $y = 0$ را در معادله مکان-زمان اعمال می‌کنیم.

$$y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \xrightarrow[y = 0]{\text{برخورد به زمین}} 0 - 20 = -5t^2 + 30t \longrightarrow t^2 - 6t - 4 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 16}}{2} \longrightarrow \underbrace{t = -0.55\ s}_{\text{غیرقابل قبول}},\ t = 6.55\ s$$

هـ) برد یا فاصله افقی مربوط به محور x است پس معادله مکان-زمان برای سرعت ثابت:

$$x = v_{0x} t \longrightarrow x = 40(6.55) = 262.0\ m$$

و) در لحظه برخورد گلوله به زمین، مؤلفه های افقی و قائم سرعت را محاسبه و بردار سرعت محاسبه می شود.

$$\begin{cases} \text{روی محور } x \text{ سرعت ثابت} & v_x = v_{ox} = 40\ m/s \\ \text{سقوط } y \text{ ها} & v_y - v_{oy} = -gt \rightarrow v_y - 30 = -10(6/55) \rightarrow v_y = -35/5\ m/s \end{cases}$$

علامت منفی، بخاطر جهت رو به پائین است.

$$\vec{v} = 40\,\hat{i} - 35/5\,\hat{j}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{40^2 + 35/5^2} = 53/48\ m/s$$

ز) زاویه بردار با محور x ها:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-35/5}{40}\right) = \tan^{-1}(-0/8875) = -41/6^\circ$$

بنابراین با دانستن معادلات حرکت روی خط راست و همچنین تجزیه بردارها، می توان مسائل حرکت پرتابی را به سادگی حل کرد و نیاز به معادلات جدیدی نیست. البته می توان معادلات جدیدی با ترکیب معادلات قبل بدست آورد که ممکن است در سرعت حل مسائل تاثیر داشته باشند. یکی از این معادله ها، معادله مسیر حرکت یک پرتابه است. معادله مسیر یعنی تغییرات y بر حسب x. کافیست از معادلات مکان زمان روی محور x و y، زمان حذف شود.

$$x = v_{ox}t = v_0\cos\theta\, t \rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t \rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + (v_0\sin\theta)\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - y_0 = -\frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

مثال: از ارتفاع ۴ متری سطح زمین، توپی با سرعت $10\ m/s$ با زاویه 45° نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می شود. در چه فاصله ای از نقطه پرتاب، توپ در ارتفاع ۲ متری زمین است.

$y_0 = 4m$, $y = 2m$, $\theta = 45^\circ$, $V_0 = 10\ m/s$, $x = ?$

حل: روش مستقیم، با تجزیه سرعت اولیه و استفاده از معادلات حرکت:

$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \ \frac{m}{s}$ ، $v_{0y} = v_0 \sin\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \ m/s$

$y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \rightarrow -2.8 = -5t^2 + 5\sqrt{2}\, t \rightarrow 5t^2 - 5\sqrt{2}\, t - 2 = 0 \rightarrow$ $\begin{cases} t = -0.28 \ s & \text{غ ق ق} \\ t = 1.44 \ s \end{cases}$

$x = v_{0x} t \rightarrow x = 5\sqrt{2}\,(1.44) = 11.28 \ m$

روش دوم : استفاده از معادله مسیر :

$y - y_0 = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta \rightarrow -2.4 = \frac{-10 x^2}{2(100)(\frac{1}{2})} + x(1)$

$\Rightarrow -0.1 x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 11.7 \ m$ ، $x = -1.7 \ m$ غ ق ق

مثال : از ارتفاع ۱۵ متری ، گلوله‌ای با سرعت افقی $10 \ m/s$ شلیک می‌شود . برد گلوله چقدر است؟

پرتابه افقی یعنی $\theta = 0$ ← از معادله مسیر با شرط برخورد گلوله به زمین $y = 0$.

$y - y_0 = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta \rightarrow 0 - 15 = -\frac{10 x^2}{2(100)^2(1)} + x(0)$

$10 x^2 = 30000 \rightarrow x = \sqrt{30000} = 173.2 \ m$

مثال : از سطح زمین ، توپی با سرعت $20 \ m/s$ با زاویه 53° بالای افق پرتاب می‌شود و در فاصله ۱۲ متری از نقطه پرتاب ، به ساختمانی برخورد می‌کند . ارتفاع محل برخورد توپ چقدر است؟

معادله مسیر $y - y_0 = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta$

$y - 0 = -\frac{10 (12)^2}{2(20)^2 (0.6)^2} + \frac{4}{3}(12) \rightarrow y = -\frac{10(12)(12)}{2(400)(0.36)} + 16 \rightarrow y = 11 \ m$

حرکت نسبی :

الف) اگر دو متحرک با سرعت‌های $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ نسبت به زمین (دستگاه ساکن) حرکت کنند ، در این صورت ، سرعت متحرک

① از دید ناظر واقع در متحرک ② عبارت است از : $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (سرعت متحرک ① از دید ②)

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (سرعت متحرک ② از دید ①)

مثال : اتومبیل A با سرعت $60 \ \frac{km}{h}$ و اتومبیل B با سرعت $80 \ \frac{km}{h}$ هر دو به طرف شرق حرکت می‌کنند . مطلوبست :

الف) سرعت اتومبیل A از دید B . ب) سرعت اتومبیل B از دید A .

الف) $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \xrightarrow{\text{+ جهت شرق}} V_{AB} = 60 - 80 = -20 \frac{km}{h}$

یعنی ناظر B خود را ساکن دیده و مشاهده می‌کند اتومبیل A با سرعت $20 \frac{km}{h}$ به وی نزدیک می‌شود (به سمت غرب)

ب) $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \xrightarrow{\text{+ جهت شرق}} V_{BA} = 80 - 60 = 20 \frac{km}{h}$

ناظر A خود را ساکن دیده و مشاهده می‌کند، اتومبیل B با سرعت $20 \frac{km}{h}$ به وی نزدیک می‌شود (به سمت شرق).

مثال: متحرک A با سرعت $70 \frac{km}{h}$ به شمال و متحرک B با سرعت $80 \frac{km}{h}$ به جنوب حرکت می‌کنند.

الف) سرعت A از دید B چقدر است؟ ب) سرعت B از دید A چقدر است؟

الف) $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \xrightarrow{\text{+ جهت شمال}} V_{AB} = 70 - (-80) = 150 \frac{km}{h}$

ناظر B خود را ساکن دیده و مشاهده می‌کند متحرک A با سرعت $150 \frac{km}{h}$ به شمال می‌رود.

$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \xrightarrow{\text{+ جهت شمال}} V_{BA} = -80 - (70) = -150 \frac{km}{h}$

ناظر A خود را ساکن دیده و مشاهده می‌کند که اتومبیل B با سرعت $150 \frac{km}{h}$ به سمت جنوب حرکت می‌کند.

مثال: متحرک A با سرعت $70 \frac{km}{h}$ به سمت غرب و متحرک B با سرعت $90 \frac{km}{h}$ به سمت شمال حرکت می‌کند. سرعت A از دید B چقدر است؟

$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = -70\,\hat{i} - (90\,\hat{j})$

$V_{AB} = \sqrt{70^2 + 90^2} = \sqrt{4900 + 8100} = \sqrt{13000} \cong 114 \frac{km}{h}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{90}{70}\right) = 52^\circ$

ناظر B خود را ساکن دیده و مشاهده می‌کند که متحرک A با سرعت $114 \frac{km}{h}$ به سمت جنوب غرب با زاویه 52° حرکت می‌کند.

ب) اگر جسم در دستگاهی باشد که نسبت به زمین (دستگاه ساکن) با سرعت ثابت حرکت کند. در این صورت، چنانچه جسم در

دستگاه متحرک ، دارای حرکت باشد و بخواهیم سرعت جسم را نسبت به زمین حساب کنیم ، از رابطه زیر استفاده می کنیم .

سرعت دستگاه متحرک نسبت به زمین + سرعت جسم نسبت به دستگاه متحرک = سرعت جسم نسبت به زمین

$$\vec{V} = \vec{V'} + \vec{U}$$

مثال :

قایقی می خواند در آب ساکن با سرعت $8\ m/s$ حرکت کند. این قایق در رودخانه‌ای که سرعت جریان آب در آن $6\ \frac{m}{s}$ است ، قرار می‌گیرد .

الف) چنانچه قایق هم جهت با جریان آب مسافت $1km$ را طی کند ، زمان حرکت چقدر است ؟

(حل) $V' = 8\ m/s$ ، $U = 6\ m/s$ $\rightarrow$ $\vec{V} = \vec{V'} + \vec{U}$ $\xrightarrow{\text{جهت حرکت آب +}}$ $V = 8+6 = 14\ m/s$

قایق با سرعت $14\ m/s$ نسبت به ساحل حرکت می کند.

$\vec{V'} \rightarrow$ $\vec{U} \rightarrow$

$\Delta x = Vt \rightarrow 1000 = 14t \rightarrow t = \frac{1000}{14} = 71,43\ s$

ب) اگر قایق خلاف جریان آب حرکت کند ، زمان برای طی کردن مسافت $1km$ چقدر است ؟

$\vec{U} \rightarrow$ $\vec{V'} \leftarrow$

$\vec{V} = \vec{V'} + \vec{U}$ $\xrightarrow{\text{جهت جریان آب +}}$ $V = -8+6 = -2\ m/s$

قایق نسبت به ساحل با سرعت $2\ m/s$ خلاف جریان آب حرکت می‌کند.

$\Delta x = Vt \rightarrow -1000 = -2t \rightarrow t = 500\ s$

ج) اگر قایق بخواهد از عرض رودخانه عبور کند ، طوری که درست به نقطه مقابل آغاز حرکت خود برسد ، قایق نسبت به ساحل در

چه سمتی حرکت کند و اگر عرض رودخانه 500 متر باشد ، مدت زمان عبور قایق از رودخانه چقدر است ؟

با توجه به رابطه جمع $\vec{U} + \vec{V'} = \vec{V}$ ، راستای حرکت قایق نسبت به زمین برسرعت جریان

آب عمود است و روش جمع مثلث به سادگی قابل انجام است .

$\cos\theta = \frac{U}{V'} = \frac{6}{8} = 0,75 \rightarrow \theta = \cos^{-1}(0,75) = 41,4^\circ$

قایق باید نسبت به ساحل با زاویه $41,4^\circ$ خلاف جریان آب حرکت کند.

$V'^2 = U^2 + V^2 \rightarrow V = \sqrt{V'^2 - U^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 5,3\ m/s$

یا $\sin\theta = \frac{V}{V'} \rightarrow V = V'\sin\theta \Rightarrow V = 8\sin(41,4) = 5,3\ m/s$

$\Delta x = Vt \rightarrow 500 = 5,3t \rightarrow t = \frac{500}{5,3} = 94,3\ s$

مثال: هواپیمایی می‌خواهد از فرودگاه A به فرودگاه B پرواز کند. فاصله میان دو فرودگاه ۵۰۰ km است. اگر سرعت هواپیما در هوا $300\ \frac{km}{h}$ و در مدت پرواز، باد با سرعت $80\ \frac{km}{h}$ از جنوب غرب (به سمت شمال شرق) بوزد. سمت‌گیری هواپیما چگونه باشد تا به مقصد برسد و مدت سفر چقدر است؟ (فرودگاه B در شمال A است).

هواپیما باید نسبت به زمین در جهت جنوب به شمال حرکت کند. به دلیل وزش باد باید سمت‌گیری به سمت شمال غرب داشته باشد تا روی مسیر بماند. طبق رابطه

$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U}$ سرعت نسبی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_x = V'_x + U_x \\ V_y = V'_y + U_y \end{cases}$$

$V_x = V'_x + U_x \rightarrow 0 = -V'\cos\theta + U\cos 45$ ①

$V_y = V'_y + U_y \rightarrow V = V'\sin\theta + U\sin 45$ ②

از معادله ①: $V'\cos\theta = U\cos 45 \Rightarrow 300\cos\theta = 80\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \cos\theta = \frac{56}{300}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{56}{300}\right) = 79,24^\circ$ هواپیما باید با زاویه $79,24^\circ$ در جهت شمال غرب پرواز کند.

از معادله ②: $V = 300\sin(79,24) + 80\sin 45 \rightarrow V = 294,7 + 56 = 350,7\ \frac{km}{h}$

هواپیما نسبت به زمین با سرعت $350,7\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند.

مدت پرواز: $\Delta x = Vt \rightarrow 500 = 350,7\,t \rightarrow t = \frac{500}{350,7} = 1,43\ h$